



# **Nozione di probabilità e principali approcci**

La teoria delle probabilità in fondo non  
è altro che buon senso ridotto a  
calcolo.

*Simon de Laplace*

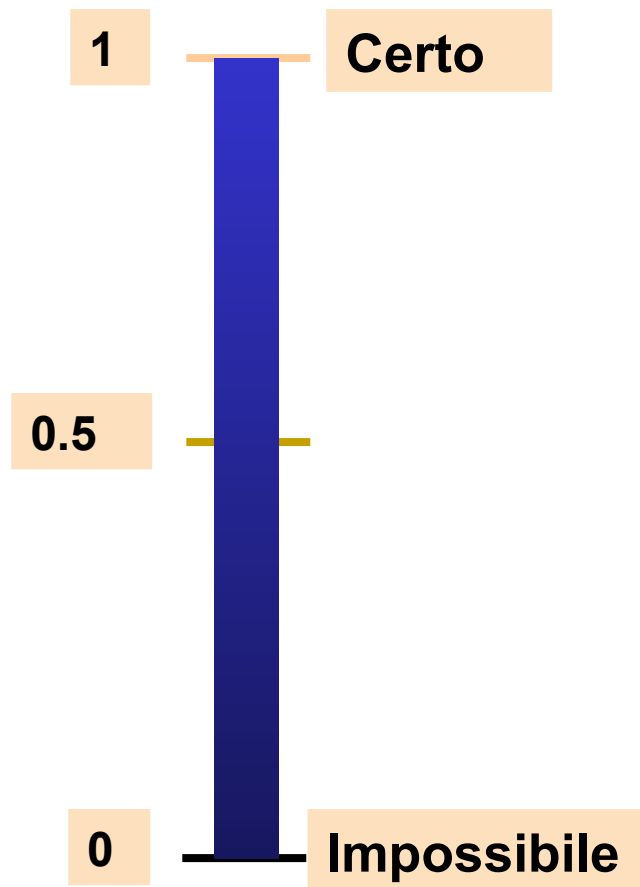


# La probabilità

- **Probabilità:** grado di fiducia che un *individuo razionale* attribuisce al verificarsi di un evento

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad \text{per qualsiasi evento } E$$

- Per assegnare un valore alla probabilità l'individuo razionale usa tutte le informazioni disponibili sulla struttura dell'esperimento e sulle sue precedenti realizzazioni
- Vediamo due situazioni in cui vi sono delle semplici regole per determinare il valore della probabilità:
  - Approccio classico
  - Approccio frequentista
  - Approccio soggettivo





# Probabilità: approccio classico

Consideriamo un esperimento casuale i cui risultati possibili sono in numero finito e sono *equiprobabili* (= stessa probabilità). In questa situazione la probabilità di un evento  $E$  è data da

$$P(E) = \frac{\text{Numero di risultati in } E}{\text{Numero di risultati possibili}} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

Es. nel lancio di un dado, poniamo  $A = \{\text{Numero pari}\} = \{2, 4, 6\}$

Assumendo che tutti i punti campione abbiano la stessa probabilità (cioè che il dado sia bilanciato)

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$

L'assunzione che tutti i punti campione abbiano la stessa probabilità (cioè che il dado sia bilanciato) è cruciale: se è vera il valore 0.5 è ben calcolato, se è falsa il valore 0.5 non va bene. Tuttavia, per verificare la plausibilità di tale assunzione bisogna ripetere più volte l'esperimento



# Verifica empirica della probabilità /1

- L'approccio classico è *solo apparentemente oggettivo*, perché si basa sull'**ipotesi di equi-probabilità** degli eventi elementari: credere in tale ipotesi è *soggettivo*, perché dipende dalla conoscenza a priori del fenomeno (dado bilanciato, lanciatore onesto ...)
- Nel caso in cui l'esperimento sia ripetibile più volte nelle stesse identiche condizioni si può stimare la probabilità come frequenza, per cui l'adeguatezza delle ipotesi può essere *valutata empiricamente* (nel senso che si possono raccogliere prove contro di essa).
- Se ad es. dopo un grande numero di ripetizioni in identiche condizioni la frequenza relativa con cui si è presentata testa è lontana da 0.5, allora l'ipotesi di equi-probabilità non tiene, per cui va sostituita con un'altra.
  - grande e lontana sono termini vaghi ma possono (e devono!) essere resi precisi, cioè sostituiti con numeri (come vedremo più avanti)



# Probabilità: approccio frequentista

Quando si osserva una serie di prove e si assume che le prove siano ripetizioni *indipendenti e in identiche condizioni* di un certo esperimento aleatorio  $\rightarrow$  la probabilità di  $E$  è calcolata come

$$\hat{P}_n(E) = \frac{n_E}{n} = \frac{\text{Numero di prove in cui si è verificato } E}{\text{Numero totale di prove}}$$

Es. nel lancio di un dado, poniamo  $A = \{\text{Numero pari}\} = \{2,4,6\}$  e supponiamo che l'esperimento aleatorio "lancio del dado" venga ripetuto 50 volte, in 23 delle quali è uscito un numero pari e quindi si è verificato  $A$ . Pertanto  $P(A) = 23/50 = 0.46$ . Osservando altre prove la stima si modifica (es. lanciando il dado altre 50 volte l'evento  $A$  si potrebbe verificare 26 volte e quindi la nuova stima sarebbe  $(23+26)/(50+50) = 0.49$ . Per fortuna al crescere del numero di prove la stima diventa sempre più precisa e converge ad un valore (in questo esempio, se il dado è bilanciato converge a 0.5)

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_n(E)$$

limite a cui tende la proporzione di prove in cui si verifica  $E$  quando il numero di prove tende a



# Verifica empirica della probabilità /2

- Indicando con  $n$  il numero di ripetizioni dell'esperimento aleatorio, se il valore ipotizzato della probabilità è corretto, al crescere di  $n$  la frequenza relativa osservata converge alla probabilità.
- Attenzione: per  $n$  piccolo la discrepanza può essere notevole anche se il modello è corretto.
  - Esempio: ipotizziamo che una moneta sia bilanciata, cioè ipotizziamo che  $P(T)=0.5$ , e per verificare tale modello probabilistico lanciamo la moneta  $n$  volte. Vogliamo valutare l'evidenza empirica contro tale modello nel caso in cui esca sempre testa, cioè la frequenza relativa osservata di  $T$  è 1. Chiaramente 1 è molto lontano da 0.5, tuttavia se  $n$  è molto piccolo l'evidenza empirica contro il modello ipotizzato è comunque debole. Infatti, se il modello ipotizzato è vero, la probabilità di osservare  $n$  teste su  $n$  lanci è  $1/2^n$  e quindi, ad es., è  $1/4$  per  $n=2$ ,  $1/16$  per  $n=4$ ,  $1/256$  per  $n=8$ .

7



# Probabilità frequentista e campionamento

- L'approccio frequentista spesso non è giustificabile nelle situazioni reali perché si basa su ripetizioni indipendenti e in identiche condizioni
- Tuttavia, nella statistica l'approccio frequentista è largamente usato perché il ***campionamento*** è un processo aleatorio che si svolge in modo controllato e per il quale si può tranquillamente ragionare in termini di ripetizioni indipendenti e in identiche condizioni



# Probabilità soggettiva

La probabilità di un evento  $E$  è definita come il grado di fiducia che un individuo razionale attribuisce al verificarsi di un evento

- La misura (soggettiva) di probabilità si deriva ponendo l'individuo (razionale) di fronte ad un'operazione di scommessa chiedendo quanto è disposto a puntare per ricevere 1 nel caso in cui l'evento in questione si realizzi
- Questo approccio si può usare sempre, in tutte le situazioni, ma è davvero importante quando gli approcci classico e frequentista non sono utilizzabili perché
  - Lo spazio campione  $S$  non è costituito da un insieme finito di punti equiprobabili  $\rightarrow$  l'approccio classico è inutilizzabile
  - Non si dispone di osservazioni indipendenti e in identiche condizioni  $\rightarrow$  l'approccio frequentista è inutilizzabile

es. Qual è la probabilità che il governo adotti un certo provvedimento? Qual è la probabilità che la Fiorentina vinca la prossima partita?



# Il padre della probabilità soggettiva

Bruno de Finetti

(Innsbruck, 13 giugno 1906 – Roma, 20 luglio 1985) è il creatore della teoria delle probabilità moderna, o meglio dell'interpretazione cosiddetta soggettivistica delle probabilità. De Finetti ci ha insegnato a stimare le nostre convinzioni soggettive, il nostro grado di fiducia nell'accadere di un evento.

Quanto denaro scommetteremmo su un evento incerto, non so, che vinca la squadra del cuore al derby piuttosto che si realizzi una tale misura politica oppure che cresca un certo mercato. Ecco, de Finetti ci ha fatto vedere come convinzioni umane fallibili, veramente umane, troppo umane, possono poi però diventare lentamente degli algoritmi che funzionano. E si può quindi arrivare a un consenso pur partendo da stime di probabilità molto diverse. Così lavora la ragione degli uomini: appunto lentamente, costruendo dai propri errori, correggendo le proprie stime iniziali.

Giulio Giorello (filosofo/matematico nato 1945)

**«*La probabilità non esiste*»**

Bruno de Finetti (nella prefazione del libro *Teoria delle probabilità*, 1970)



# Probabilità: definizioni

## CLASSICA:

Probabilità: *rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili*

Si basa su ipotesi relative all'esperimento e prescinde dalla sua effettiva realizzazione

## FREQUENTISTA:

Probabilità: *rapporto tra frequenza osservata di casi favorevoli e numero di prove effettuate*

Si basa sulle osservazioni e prescinde da informazioni preesistenti sulle modalità dell'esperimento

## SOGGETTIVA:

Probabilità: *grado di fiducia nel verificarsi di un evento espresso da un soggetto razionale*

Si basa su tutte le informazioni a disposizione del soggetto, incluse le caratteristiche dell'esperimento e sue realizzazioni



# Regole della probabilità

- **Regola dell'evento complementare:**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{ovvero} \quad P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

- **Regola della somma (o additiva):**

- La probabilità dell'unione di due eventi è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Se A e B sono incompatibili  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ , quindi l'espressione si semplifica in

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



# Esempio

Considera un mazzo di 52 carte, con i quattro semi: ♥ ♣ ♦ ♠

Evento A = la carta è un asso    Evento B = la carta è rossa

$$P(\text{Non Asso}) = 1 - P(\text{Asso}) = 1 - 4/52 = 48/52$$

$$P(\text{Rossa} \cup \text{Asso}) = P(\text{Rossa}) + P(\text{Asso}) - P(\text{Rossa} \cap \text{Asso})$$

$$= 26/52 + 4/52 - 2/52 = 28/52$$

| Tipo     | Colore |      | Totale |
|----------|--------|------|--------|
|          | Rossa  | Nera |        |
| Asso     | 2      | 2    | 4      |
| Non-Asso | 24     | 24   | 48     |
| Totale   | 26     | 26   | 52     |

Non contare  
due volte i  
due assi rossi!

(probabilità  
classica: casi  
favorevoli su  
casi possibili)



# Valutazioni incoerenti di probabilità

I classici studi di Daniel Kahneman e Amos Tversky hanno dimostrato che gli esseri umani talvolta assegnano le probabilità in modo incoerente, cioè violando le regole basilari del calcolo delle probabilità. Ecco un esempio delle valutazioni richieste ai soggetti arruolati negli esperimenti, provate a rispondere.



Daniel Kahneman, premio Nobel per l'Economia 2002

Immaginiamo una donna di nome Linda, trentun anni, single, estroversa e molto intelligente, laureata in filosofia. Al college era molto interessata ai temi della discriminazione e della giustizia sociale, e ha partecipato a manifestazioni contro il nucleare. Ordinare le seguenti affermazioni dalla più probabile alla meno probabile:

- A. Linda fa l'impiegata in banca
- B. Linda è attiva nel movimento femminista
- C. Linda fa l'impiegata in banca ed è attiva nel movimento femminista

Alcuni dei possibili ordinamenti sono incoerenti: quali e perché?