



# Probabilità condizionata

Il dubbio non è piacevole, ma  
la certezza è ridicola.

*Voltaire*



# Probabilità condizionata /1

- Consideriamo due eventi  $A$  e  $B$  e supponiamo di sapere che l'evento  $B$  si è verificato (quindi su  $B$  non vi è più incertezza)
  - In generale questa conoscenza modifica la probabilità dell'evento  $A$
- Nell'approccio classico condizionarsi a  $B$  significa che i punti campione (casi possibili) da considerare al denominatore della probabilità non sono tutti quelli dello spazio campionario  $S$ , ma solo quelli contenuti in  $B$ 
  - in altri termini, lo spazio campionario va modificato alla luce delle informazioni sopraggiunte  $\rightarrow B$  è il nuovo spazio campionario dell'esperimento



# Probabilità condizionata /2

- La probabilità di  $A$  condizionatamente a  $B$ , detta anche probabilità di  $A$  dato  $B$  e scritta  $P(A | B)$ , consiste nella valutazione della probabilità di un evento  $A$  valutato subordinatamente allo spazio campionario generato dall'evento  $B$
- Approccio classico:  $P(A | B)$  è il rapporto tra il numero di casi favorevoli (punti campione per cui si verificano  $A$  e  $B$ ) ed il numero di casi possibili (punti campione per cui si verifica  $B$ ):

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilità condizionata

Probabilità congiunta

Probabilità marginale

[la definizione richiede che  $P(B) > 0$ ]



# Probabilità condizionata – es. 1

Riprendiamo l'esempio del lancio di un dado, ponendo

$$A = \{\text{Numero pari}\} = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = 1/2$$

$$B = \{\text{Numero minore o uguale a 3}\} = \{1, 2, 3\} \rightarrow P(B) = 1/2$$

$$\text{Si noti che } A \cap B = \{2\} \rightarrow P(A \cap B) = 1/6$$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \quad \left( = \frac{\text{punti campionari in } A \cap B}{\text{punti campionari in } B} \right)$$

$P(A | B) \neq P(A) \rightarrow$  l'informazione che  $B$  si è verificato cambia la probabilità di  $A$ , in questo esempio *diminuisce*



## Probabilità condizionata – es. 2

Continuiamo l'esempio del lancio di un dado, ponendo

$$A = \{\text{Numero pari}\} = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = 1/2$$

$$C = \{\text{Numero tra 2 e 4}\} = \{2, 3, 4\} \rightarrow P(C) = 1/2$$

$$\text{Si noti che } A \cap C = \{2, 4\} \rightarrow P(A \cap C) = 2/6 = 1/3$$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

$$P(A | C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3} \quad \left( = \frac{\text{punti campionari in } A \cap C}{\text{punti campionari in } C} \right)$$

$P(A | C) \neq P(A) \rightarrow$  l'informazione che  $C$  si è verificato cambia la probabilità di  $A$ , in questo esempio *aumenta*



## Probabilità condizionata – es. 3

Continuiamo l'esempio del lancio di un dado, ponendo

$$A = \{\text{Numero pari}\} = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = 1/2$$

$$D = \{\text{Numero minore o uguale a 2}\} = \{1, 2\} \rightarrow P(D) = 1/3$$

$$\text{Si noti che } A \cap D = \{2\} \rightarrow P(A \cap D) = 1/6$$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

$$P(A | D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2} \quad \left( = \frac{\text{punti campionari in } A \cap D}{\text{punti campionari in } D} \right)$$

$P(A | D) = P(A) \rightarrow$  l'informazione che  $D$  si è verificato *non* cambia la probabilità di  $A \rightarrow$   $A$  è indipendente da  $D$



# Probabilità condizionata – es. 4

Negli esempi precedenti

$$P(A) = 1/2 = 0.50$$

$$P(A | B) = 1/3 = 0.33 \text{ diminuisce}$$

$$P(A | C) = 2/3 = 0.67 \text{ aumenta}$$

$$P(A | D) = 1/2 = 0.50 \text{ invariata (indipendenza)}$$

Osservazione: con riferimento alla probabilità di  $A$ , il condizionamento a  $B$  ha un effetto opposto al condizionamento a  $C$  anche se  $P(B)=P(C) \rightarrow$  il valore della probabilità dell'evento condizionante non ha niente a che fare con l'effetto del condizionamento



# A dato B oppure B dato A?

In generale  $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

Ad es.  $P(A) = 0.8$   $P(B) = 0.4$   $P(A \cap B) = 0.2$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

In generale, le due probabilità condizionate hanno un significato (e un valore) molto diverso. Es. A= amministratore delegato di una grande società, B = maschio  $\rightarrow P(B \mid A) > 0.5$  (gli amministratori delegati sono in maggioranza maschi), ma ovviamente  $P(A \mid B)$  è molto piccola...



# La fallacia dell'accusatore

Consideriamo il seguente esempio (D. Hand, 2014):

|                           | Innocenti | Colpevoli |       |
|---------------------------|-----------|-----------|-------|
| Impronte digitali         | 9         | 1         | 10    |
| Nessuna impronta digitale | 7 mld     | 0         | 7 mld |
|                           | 7 mld+ 9  | 1         |       |

Definiamo

- $N$  = l'imputato è innocente
- $D$  = l'imputato ha lasciato impronte digitali sul luogo del delitto

Segue che

- $P(D|N) = 9 / (7 \text{ mld} + 9) = \text{circa } 1 \text{ su } 1 \text{ miliardo}$
- $P(N|D) = 9 / 10 = 0.9$

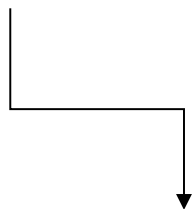
Come valutare l'indizio che l'imputato ha lasciato impronte digitali sul luogo del delitto? La probabilità rilevante è  $P(N|D)=0.9$ , ma alcuni avvocati e giudici pensano che sia la piccolissima  $P(D|N)$  (*fallacia dell'accusatore*)



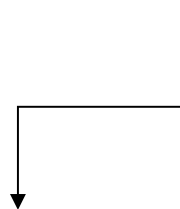
# Regola moltiplicativa (o della catena)

Applicando la definizione di probabilità condizionata, è anche possibile formulare la probabilità congiunta tramite le condizionate:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



$$P(A | B)P(B) = P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$$



# Regola moltiplicativa – esempio 1

Supponiamo di estrarre a caso un numero intero tra 1 e 10

$$A = \{\text{Numero dispari}\} \rightarrow P(A) = 5/10$$

$$B = \{\text{Numero} \leq 3\} \rightarrow P(B) = 3/10$$

$$A \cap B = \{1, 3\} \rightarrow P(A \cap B) = 2/10$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/10}{3/10} = \frac{2}{3}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5}$$

$$P(A | B)P(B) = P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{10}$$



## Regola moltiplicativa – esempio 2

Un'organizzazione a scopo benefico cerca di raccogliere dei fondi contattando una lista di persone. È possibile chiamare il 40% dei nominativi sulla lista; di questi, il 30% fa una promessa di donazione. Solo la metà, purtroppo, mantiene fede all'impegno ed invia un assegno.

Quale percentuale delle persone presenti sulla lista contribuisce effettivamente alla raccolta dei fondi? Definiamo i tre eventi seguenti

$A = \{\text{l'associazione raggiunge un donatore potenziale}\}$

$B = \{\text{il donatore fa una promessa di donazione}\}$

$C = \{\text{il donatore contribuisce realmente}\}$

Noi sappiamo che  $P(A) = 0.4$

$$P(B|A) = 0.3$$

$$P(C|A \cap B) = 0.5$$

La probabilità che vogliamo dunque ricavare è

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = 0.4 \times 0.3 \times 0.5 = 0.06$$

Soltanto il 6% dei potenziali donatori contribuisce realmente con una donazione. [Esempio 11.9 del libro di D. Moore]



# Indipendenza statistica

La teoria della casualità è fondamentalmente una codificazione del senso comune, ma è anche il regno delle sottigliezze, un campo in cui famosi luminari hanno commesso errori madornali e in cui famigerati giocatori d'azzardo hanno avuto intuizioni corrette.

*Leonard Mlodinow*



# Indipendenza statistica /1

Si parla di *indipendenza statistica* (o stocastica) quando la conoscenza dell'evento  $B$  **non** modifica la probabilità che si verifichi l'evento  $A$ , cioè

$$P(A | B) = P(A)$$

Probabilità condizionata

Probabilità marginale

La realizzazione dell'evento  $B$  è *ininfluente* per determinare la probabilità dell'evento  $A$



# Indipendenza statistica /2

Dalle relazioni  $P(A | B)P(B) = P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$

viste in precedenza segue che l'*indipendenza statistica* può essere espressa in 3 modi equivalenti (si assuma che A e B siano eventi di probabilità non nulla):

$$P(A | B) = P(A)$$

$$P(B | A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Esercizio 1: usando il diagramma di Venn rappresentare (i) eventi indipendenti e (ii) eventi incompatibili
- Esercizio 2: dimostrare che due eventi *incompatibili* non possono essere *indipendenti*



# Copie di sicurezza



- La regola moltiplicativa spiega perché è una buona idea fare più copie dei file
- Ad es., ho due copie della mia canzone preferita, una sullo smartphone e una sul notebook
  - A = «la copia sullo smartphone va persa»  $P(A)=1/500$
  - B = «la copia sul notebook va persa»  $P(B)=1/2000$(la copia può andare persa per vari motivi: file corrotto, dispositivo distrutto o smarrito ...)

Siccome posso ragionevolmente assumere che i due eventi siano indipendenti, la probabilità che si verifichino entrambi (cioè che la mia canzone preferita vada irrimediabilmente persa) è

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B) = 1/500 \times 1/2000 = 1/1000000$$

Ok, posso stare tranquillo!





# Non moltiplicate quelle probabilità!

- La probabilità congiunta di due eventi (= probabilità dell'intersezione) è uguale al prodotto delle probabilità marginali se e solo se i due eventi sono indipendenti
- Moltiplicare le probabilità quando non vi è indipendenza è un errore comune

Esempio: un testimone ha visto una persona sul luogo del delitto, e ne ricorda alcune caratteristiche: capelli neri, occhi neri, barba. Qual è la probabilità che una persona presa a caso dalla popolazione abbia le caratteristiche indicate? Supponiamo che le probabilità siano le seguenti:

A = (capelli neri)  $P(A) = 5/10$

B = (occhi neri)  $P(B) = 3/10$   $P(B|A) = 6/10$

C = (barba)  $P(C) = 1/10$   $P(C|A,B) = 5/10$

La probabilità corretta è  $P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B|A) P(C|A,B) = 150/1000 = 0.15$

Mentre con la regola del prodotto si ottiene  $P(A) P(B) P(C) = 15/1000 = 0.015$



# Calcoli errati in tribunale

- La probabilità svolge un ruolo importante nei processi e talvolta gli avvocati o gli esperti di parte effettuano dei calcoli di probabilità ... ma a volte si sono verificati errori clamorosi



- Un caso di errore con conseguenze gravissime è quello di Sally Clark: nel 1999 una corte Britannica condannò Sally Clark per l'omicidio dei due suoi bambini morti improvvisamente all'età di 11 e 8 settimane per cause ignote



# Il caso Sally Clark

- Non furono trovate prove dell'omicidio, né una valida motivazione. L'accusa sosteneva il soffocamento volontario, la difesa parlava di cause naturali, la cosiddetta sindrome della "morte in culla" (SIDS)
- Un pediatra interpellato come esperto affermò che la probabilità che in una famiglia vi siano due casi di "morte in culla" è di circa 1 su 73 milioni.
  - Infatti dai dati disponibili emerge che in una famiglia come quella di Sally Clark la "morte in culla" colpisce un bambino ogni 8500, per cui la probabilità è  $1/8500$
  - Il pediatra quindi calcolò la probabilità di due "morti in culla" come  $1/8500$  per  $1/8500$
- La stima del pediatra venne considerata attendibile e costituì la prova principale per la condanna di Sally Clark



# Il caso Sally Clark /cont.

- Come evidenziato dalla Royal Statistical Society, il calcolo del pediatra era completamente errato per almeno due motivi
  - Una seconda «morte in culla» non è indipendente dalla prima perché vi sono cause genetiche (familiarità) → è sbagliato moltiplicare a ripetizione la probabilità  $1/8500$ ; un altro esperto ha calcolato che in una famiglia in cui si è verificata una «morte in culla» i bambini successivi hanno una probabilità di  $1/100$  di morire per lo stesso motivo → la probabilità di 2 «morti in culla» è  $1/8500 * 1/100 = 1/850000$
  - Era stato accertato che il decesso del primo bambino era effettivamente dovuto a cause naturali (non vi erano dubbi), per cui la probabilità rilevante è  $1/100$
- Un primo appello nel 2000 ha confermato la sentenza, ma un secondo appello nel 2003 ha assolto Sally Clark, rilasciata dopo tre anni di carcere – questa esperienza ha segnato irrimediabilmente la donna, deceduta nel 2007

<http://www.sallyclark.org.uk/>



# Due mezze prove non fanno una prova

- Tizio è colpevole se è vero l'evento A oppure se è vero l'evento B; supponiamo che  $P(A)=P(B)=0.5$  e che i due eventi siano indipendenti

$$\begin{aligned}P(\textit{Tizio colpevole}) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.5 + 0.5 - 0 = 1 \quad \dots \text{certamente colpevole (!?)}\end{aligned}$$

- Dov'è l'errore? La probabilità dell'intersezione non è nota ma certamente non è nulla (ricorda: due eventi incompatibili non possono essere indipendenti)
- Soluzione: dato che il complemento di «almeno uno dei due eventi è vero» è «entrambi gli eventi sono falsi», segue che

$$\begin{aligned}P(\textit{Tizio colpevole}) &= P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) \\ &= 1 - P(A^c)P(B^c) = 1 - 0.5^2 = 0.75\end{aligned}$$



Hoping to avoid the difficulties of using conditional probability, Thomas Jefferson writes the Declaration of Independence.