Esercizio 1. **(Punti 6)**

a) Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{2x^2 + 2x - 4}$.

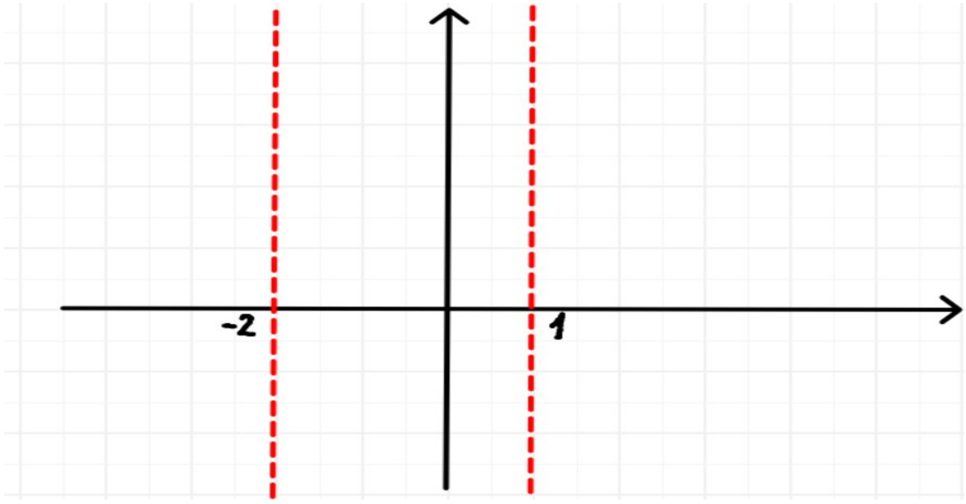
b) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $x_0 = -1$.

c) Utilizzare il grafico di $f(x)$ per dedurre quello della funzione $g(x) = log(f(x))$.

a) Il **dominio** della funzione sono i valori per cui il denominatore è diverso da zero ossia

$$2x^2+2x-4\neq 0$$

$$x\neq -2\wedge x\neq 1$$



intersezioni con x:

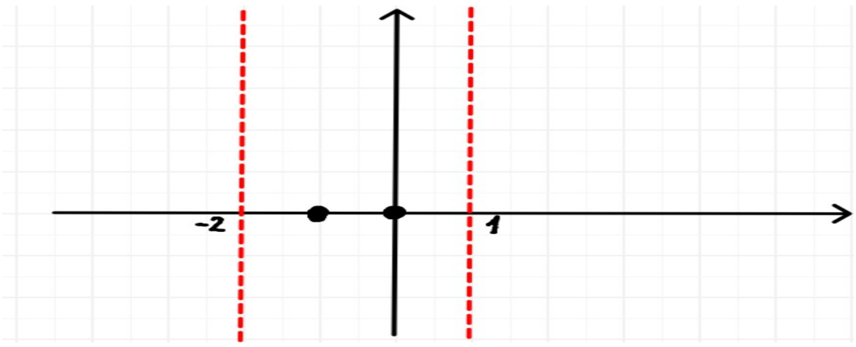
$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+x}{2x^2+2x-4} \\ y=0 \end{cases} \qquad \frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}=0 \qquad x^2+x=0$$

$x=0$ accettabile

$x=-1$ accettabile

Le intersezioni con l'asse delle x sono 2 (0;0) e (-1;0).

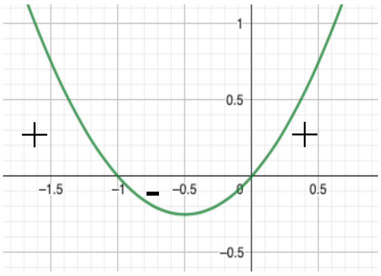
intersezioni con y:l'abbiamo già trovata (0;0)

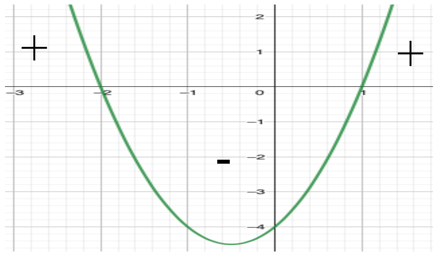


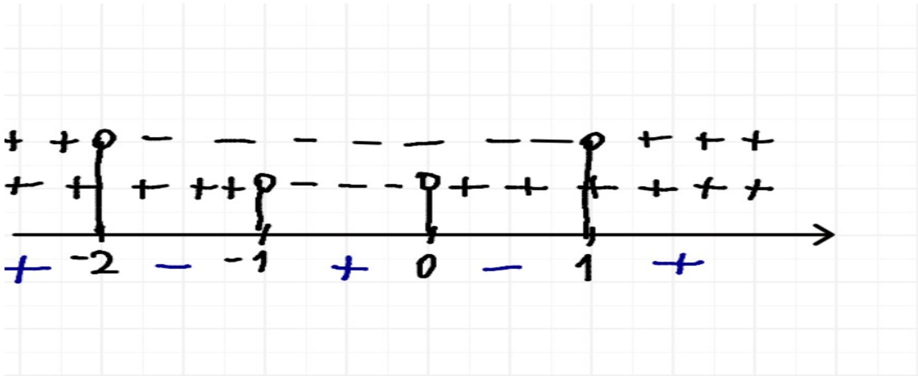
segno:

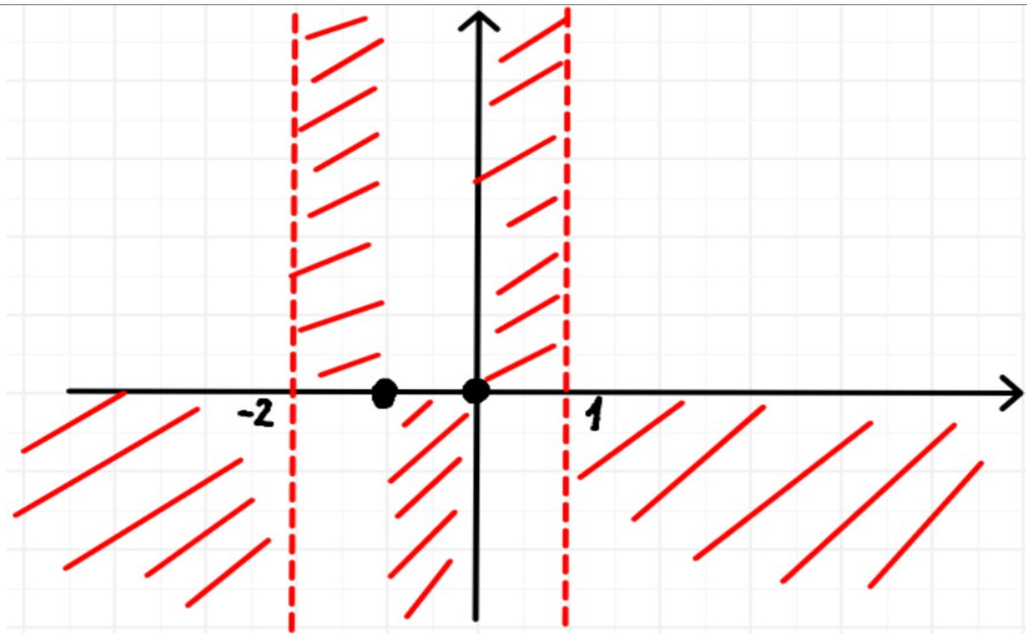
$$\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}>0$$

N: $x^2+x>0$	D: $2x^2+2x-4>0$









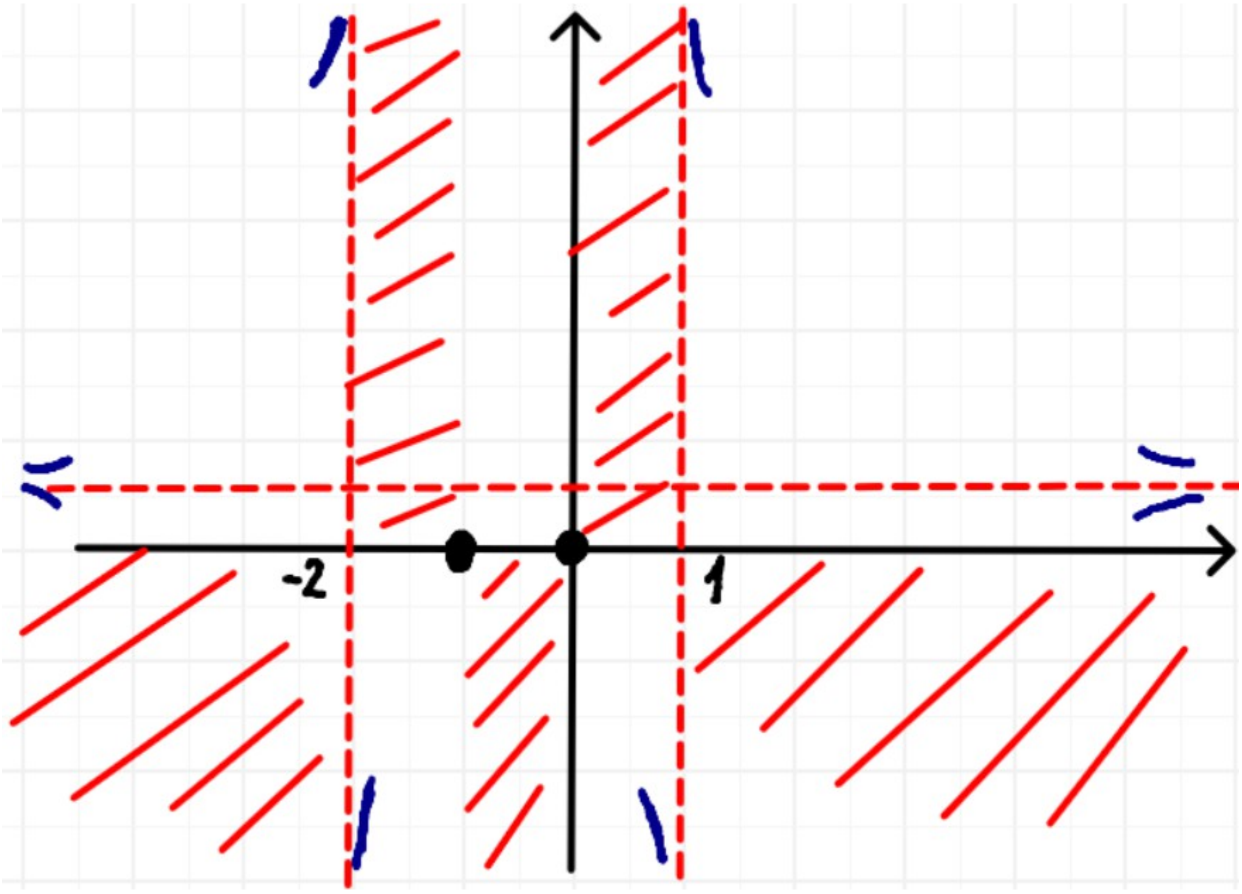
Limiti: vanno calcolati agli estremi del dominio cioè $-e+\infty, -2; 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x}{2x^2+2x-4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I. (si risolve mettendo in evidenza il grado massimo) } = \frac{1}{2} \text{ esiste}$$

$A.O.\ y = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2+x}{2x^2+2x-4} = \quad \lim_{x\to-2} \frac{4-2}{0} = \infty \text{ esiste } \quad A.V.\ x=-2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{0}=\infty \qquad \lim_{x\to -2}\frac{4-2}{0}=\infty \quad \text{esiste} \quad A.V.\ x=1$$



Derivata prima:

$$y'=\frac{(2x+1)(2x^2+2x-4)-(x^2+x)(4x+2)}{(2x^2+2x-4)^2}=\frac{4x^3+4x^2-8x+2x^2+2x-4-4x^3-2x^2-4x^2-2x}{(2x^2+2x-4)^2}$$

$$=\frac{-8x-4}{(2x^2+2x-4)^2}$$

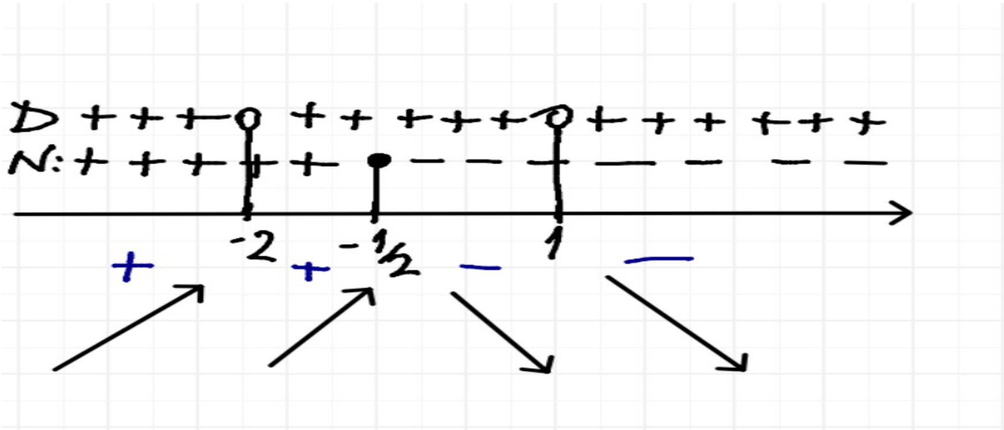
Condizione necessaria affinchè la funzione ammetta massimi e minimi è $y'=0$

$\frac{-8x-4}{(2x^2+2x-4)^2}=0$ essendo un'equazione ed avendo già fatto le CE facendo il dominio

$-8x-4=0$ da cui $x=-\frac{1}{2}$. Quest'ultimo punto essendo appartenente al dominio è un punto stazionario ossia un possibile flesso a tangente orizzontale, un possibile massimo o minimo relativo. Studiando il segno della derivata prima possiamo classificare il punto stazionario trovato.

$$\frac{-8x-4}{(2x^2+2x-4)^2}\geq 0$$

N: $-8x-4\geq 0$	D: $(2x^2+2x-4)^2>0$

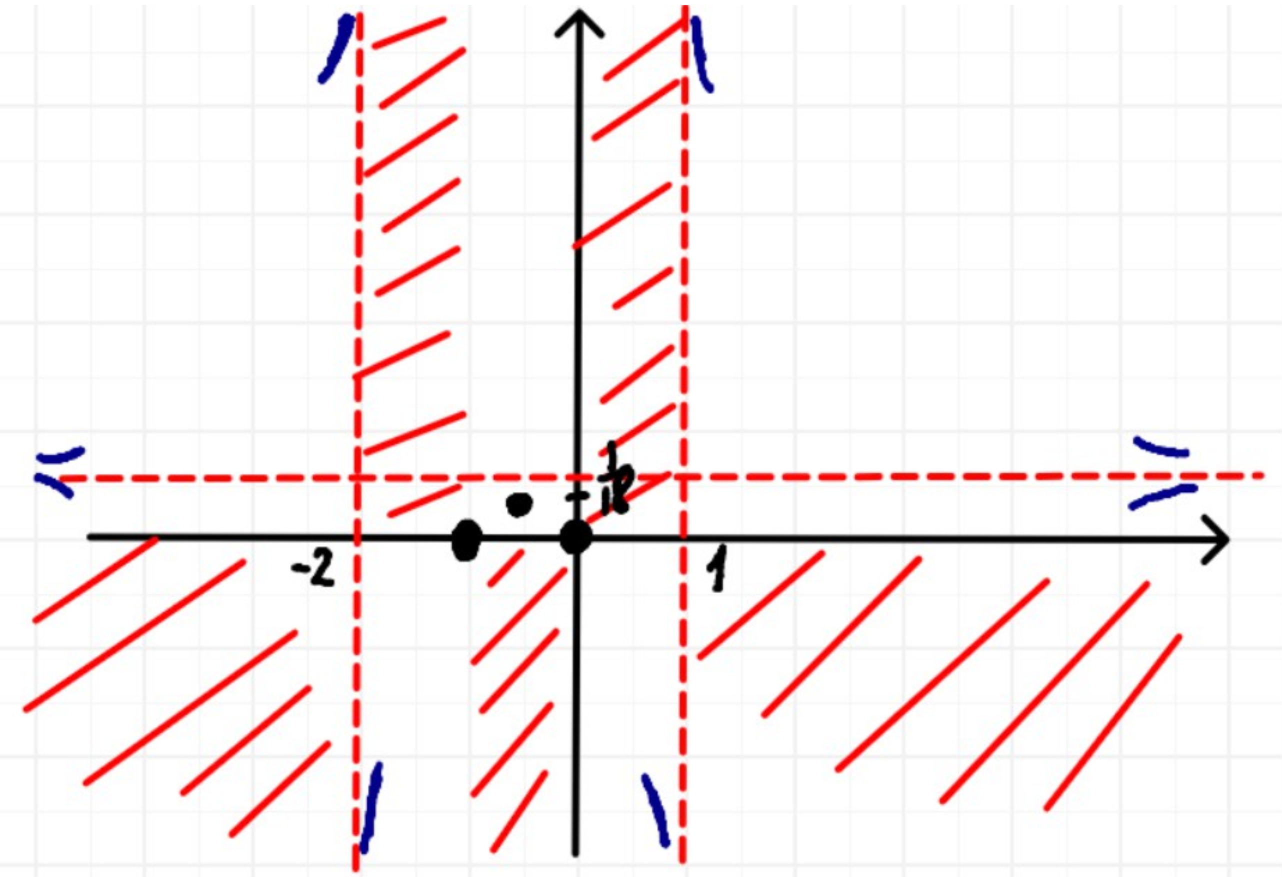
$-8x \geq +4$ $x \leq -\frac{1}{2}$	la soluzione è base $\neq 0$ $2x^2+2x-4 \neq 0$ $x \neq -2 \wedge x \neq 1$
	

$x=-\frac{1}{2}$ È un punto di massimo relativo e non ne sono presenti altri.

Per poterlo disegnare abbiamo bisogno anche della sua coordinata y, che si determina sostituendo $x=-\frac{1}{2}$ nella funzione di partenza.

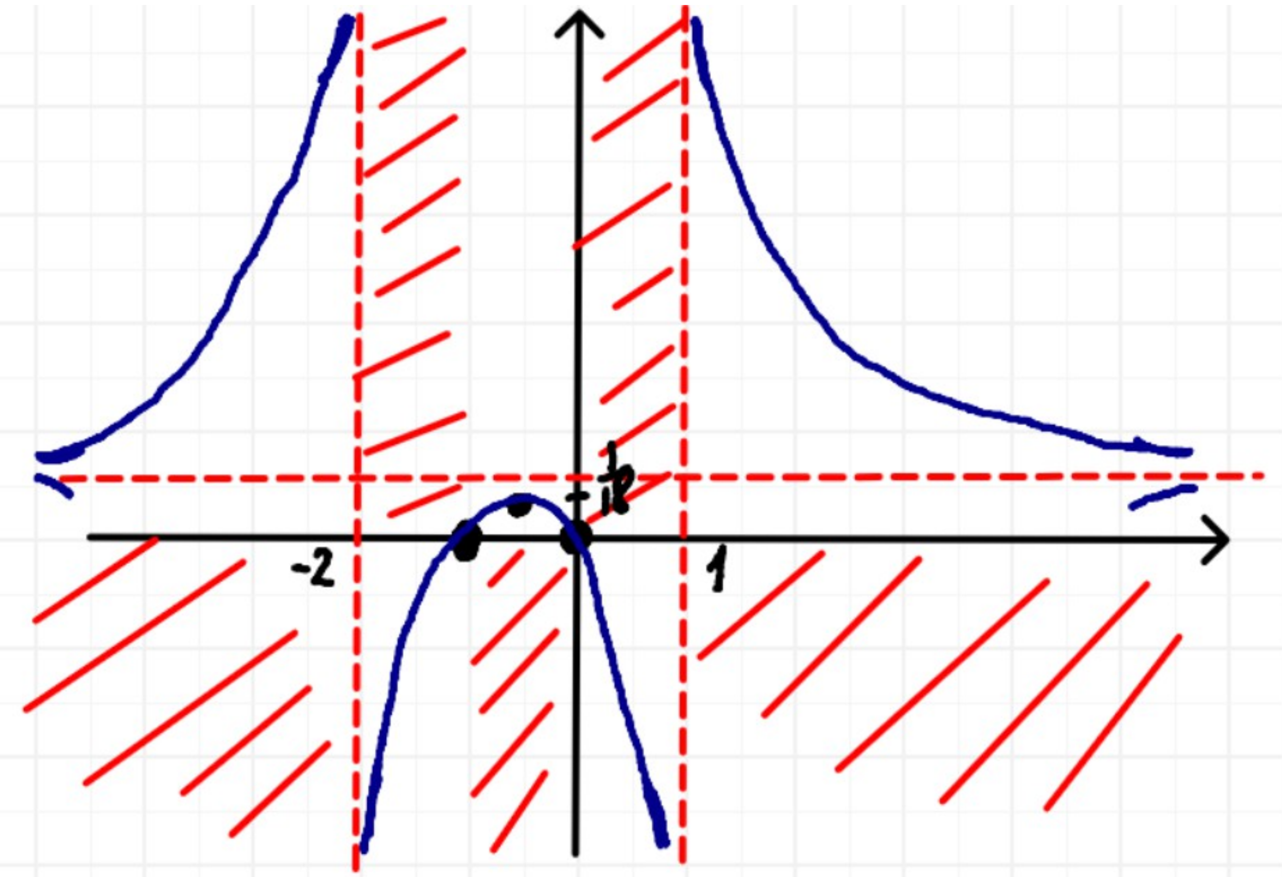
$$y=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)-1-4}=\frac{\frac{1-2}{4}}{\frac{1}{2}-5}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1-10}{2}}=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{18}$$

Il punto di massimo da disegnare è pertanto $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{18}\right)$



Spesso nello studio di funzione si deve analizzare anche la derivata seconda che ci fornisce informazioni sulla concavità della funzione. In questo caso però evitiamo il calcolo perchè molto complesso.

Disegno della funzione:



B) Si calcola $y_0 = f(x_0) = f(-1) = \frac{1-1}{2-2-4} = \frac{0}{-4} = 0$

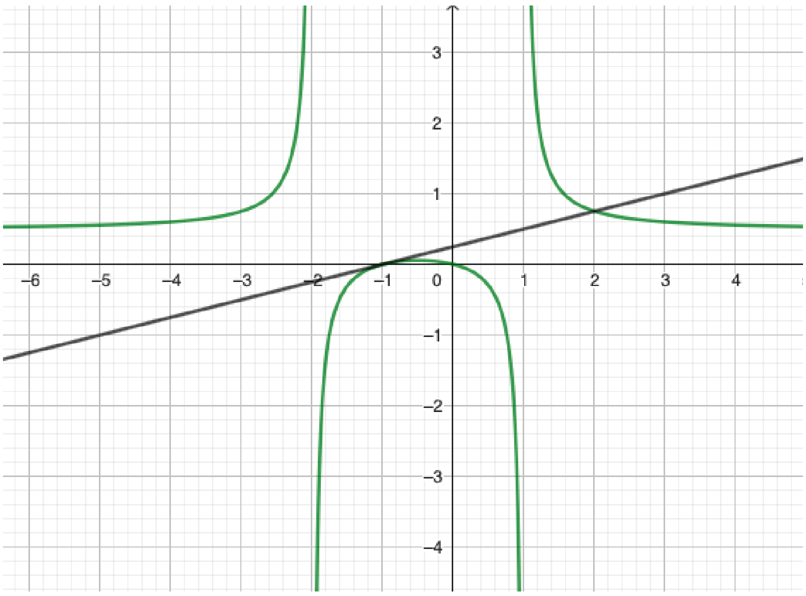
il coefficiente angolare della retta tangente nel punto -1 = f '(-1)

$$m = f'(-1) = \frac{-8(-1)-4}{(2(-1)^2+2(-1)-4)^2} = \frac{8-4}{(2-2-4)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

usando la formula del fascio di rette si determina l'equazione della retta tangente.

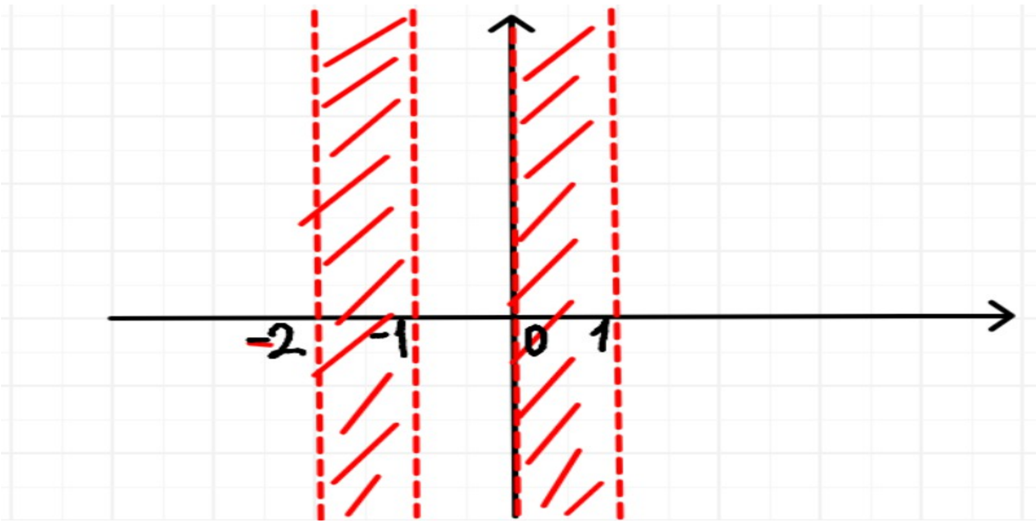
$$y - 0 = \frac{1}{4}(x+1)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$



C)Per studiare $y = \ln(f(x))$ cominciamo a determinare il **dominio**, affinchè sia definito un ln si deve avere l'argomento del logaritmo >0 ossia $f(x) > 0$.

Quest'ultima condizione è soddisfatta se $(-\infty, -2) \vee (-1, 0) \vee (1, +\infty)$. La funzione si disegna pertanto in questi intervalli.



Intersezione con asse x:

$$\begin{cases} y=\ln(f(x)) \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=\ln(f(x)) \\ y=0 \end{cases} \quad \text{passando agli esponenziali si ha} \quad \begin{cases} 1=f(x) \\ y=0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}=1$$

$$\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}-1=0$$

$\dfrac{x^2+x-2x^2-2x+4}{2x^2+2x-4}=0 \qquad \dfrac{-x^2-x+4}{2x^2+2x-4}=0 \qquad -x^2-x+4=0$ le CE sono incorporate nel dominio

$$x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\sim-2{,}56$$

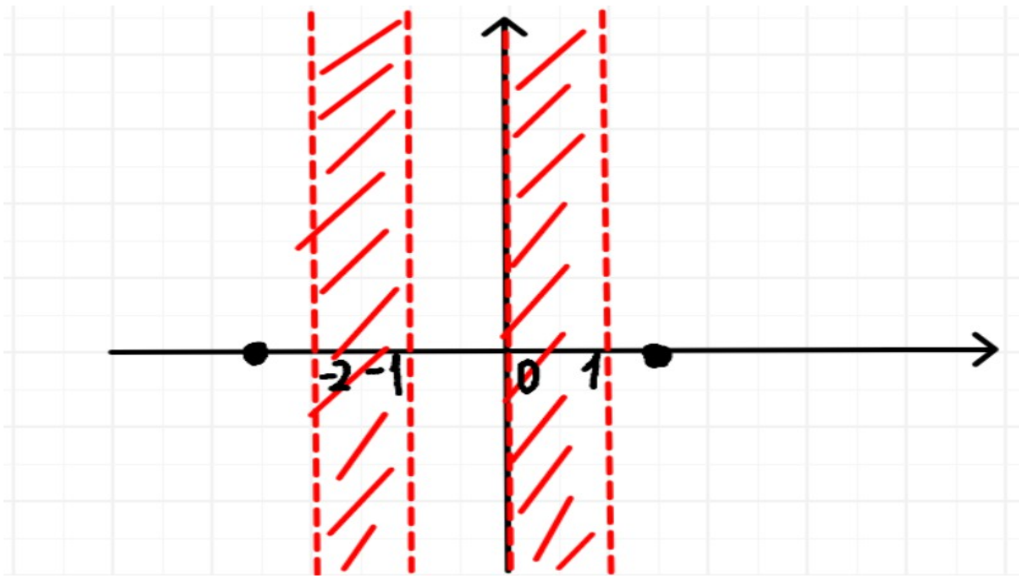
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{-2}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\sim1{,}56$$

Entrambe accettabili e pertanto ci sono due intersezioni con asse x:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};0\right) \quad \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};0\right)$$

Intersezione con asse y: non esistono perchè x=0 non fa parte del dominio.

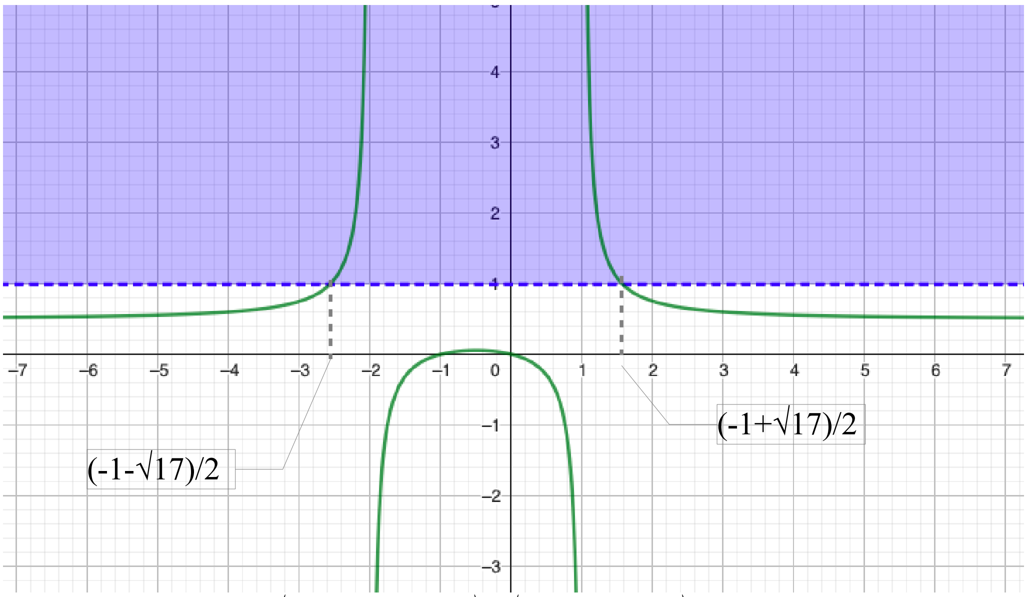


Segno: $\ln(f(x))>0$ essendo la base >1 possiamo scrivere che

$f(x)>1$

questa disequazione la possiamo risolvere in due modi:

1° modo più veloce attraverso il grafico:



da cui otteniamo la soluzione $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};-2\right)\vee\left(1;\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

2° modo risolvendo analiticamente la disequazione $\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}>1$.

limiti: vanno calcolati agli estremi del dominio $\pm\infty, -2$ da sinistra, -1 da destra, 0 da sinistra, 1 da destra.

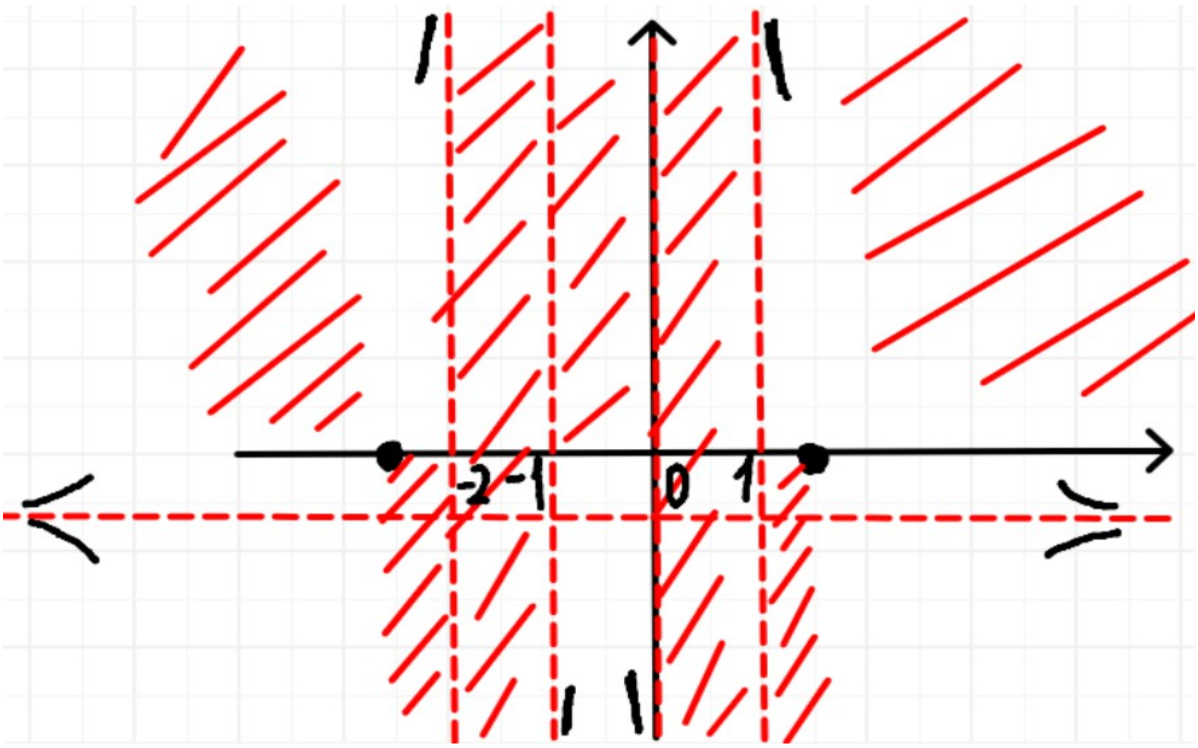
$\lim_{x\to\pm\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -\mathit{ln2} \simeq -0{,}69$ Quindi esiste asintoto orizzontale di equazione y= -ln2

$\lim_{x\to-2^-} \ln(f(x)) = \lim_{x\to-2^-} \ln\left(\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$ esiste quindi un asintoto sinistro in x= -2

$\lim_{x\to-1^+} \ln(f(x)) = \lim_{x\to-1^+} \ln\left(\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}\right) = \ln(0^+) = -\infty$ esiste quindi un asintoto destro in x= -1

$\lim_{x\to0^-} \ln(f(x)) = \lim_{x\to0^-} \ln\left(\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}\right) = \ln(0^+) = -\infty$ esiste quindi un asintoto sinistro in x= 0

$\lim_{x\to1^+} \ln(f(x)) = \lim_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$ esiste quindi un asintoto destro in x= 1



derivata prima: $y = \ln(f(x))$ è una funzione composta quindi la derivata è

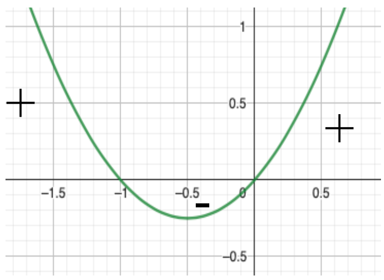
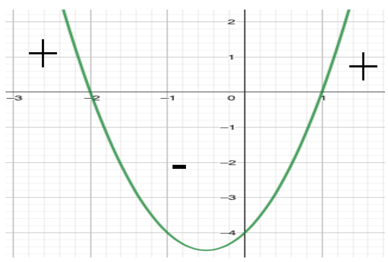
$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+x}{2x^2+2x-4}} \cdot \frac{-8x-4}{(2x^2+2x-4)^2} = \frac{2x^2+2x-4}{x^2+x} \cdot \frac{-8x-4}{(2x^2+2x-4)^2}$$

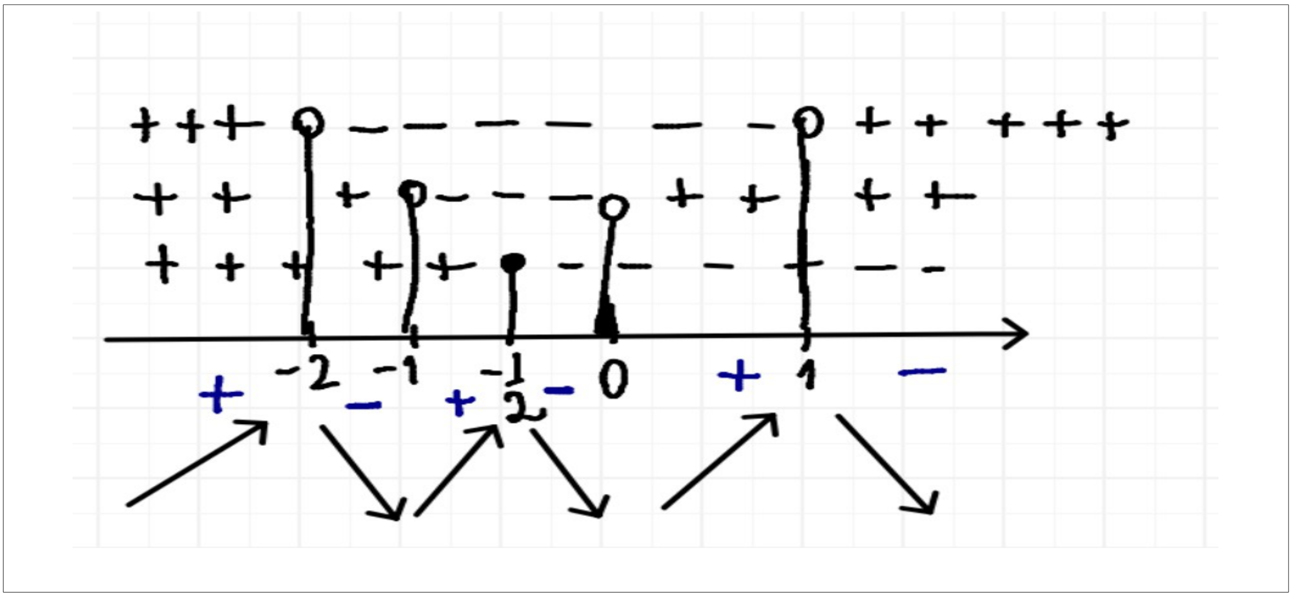
$$= \frac{-8x-4}{(x^2+x)(2x^2+2x-4)}$$

$y'=0 \qquad \frac{-8x-4}{(x^2+x)(2x^2+2x-4)} = 0$ ossia $\quad -8x-4=0 \qquad x = -\frac{1}{2}$ PS perchè appartiene al dominio.

$y' \geq 0$

$$\frac{-8x-4}{(x^2+x)(2x^2+2x-4)} \geq 0$$

N: $-8x-4 \geq 0$ $x \leq -\frac{1}{2}$	D1: $x^2+x>0 \qquad x=0;-1$ 	D2 $2x^2+2x-4>0$ $x=-2;1$ 

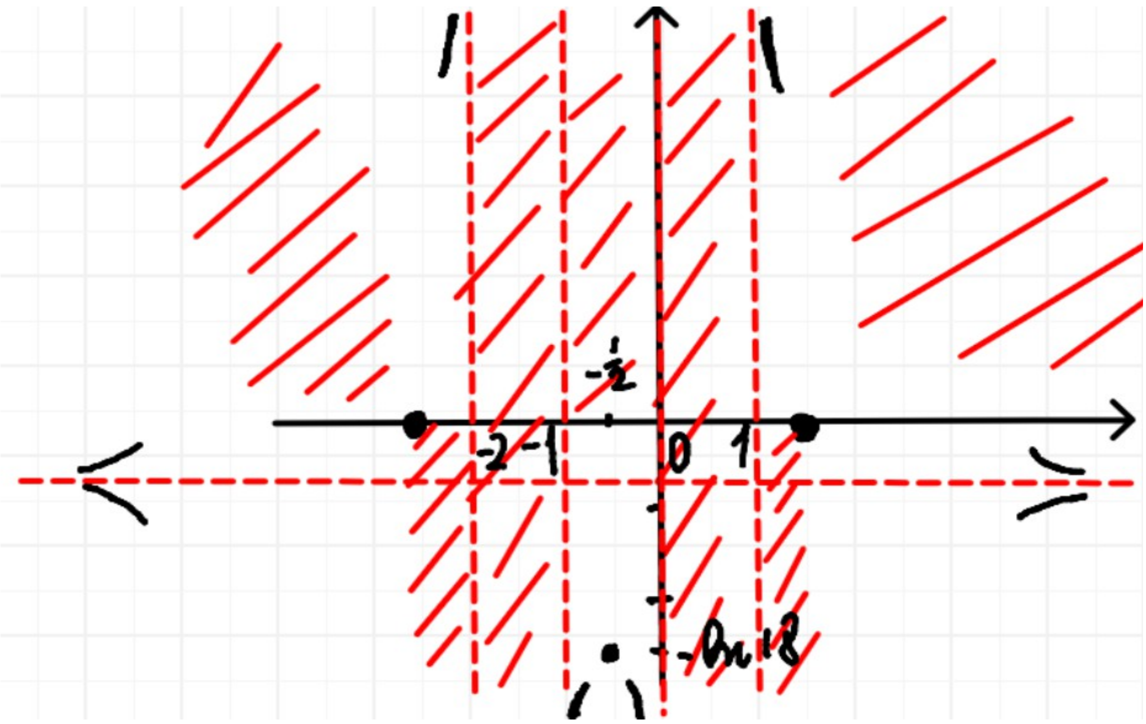


L'unico punto stazionario è $x=-\frac{1}{2}$ che risulta essere un massimo relativo.

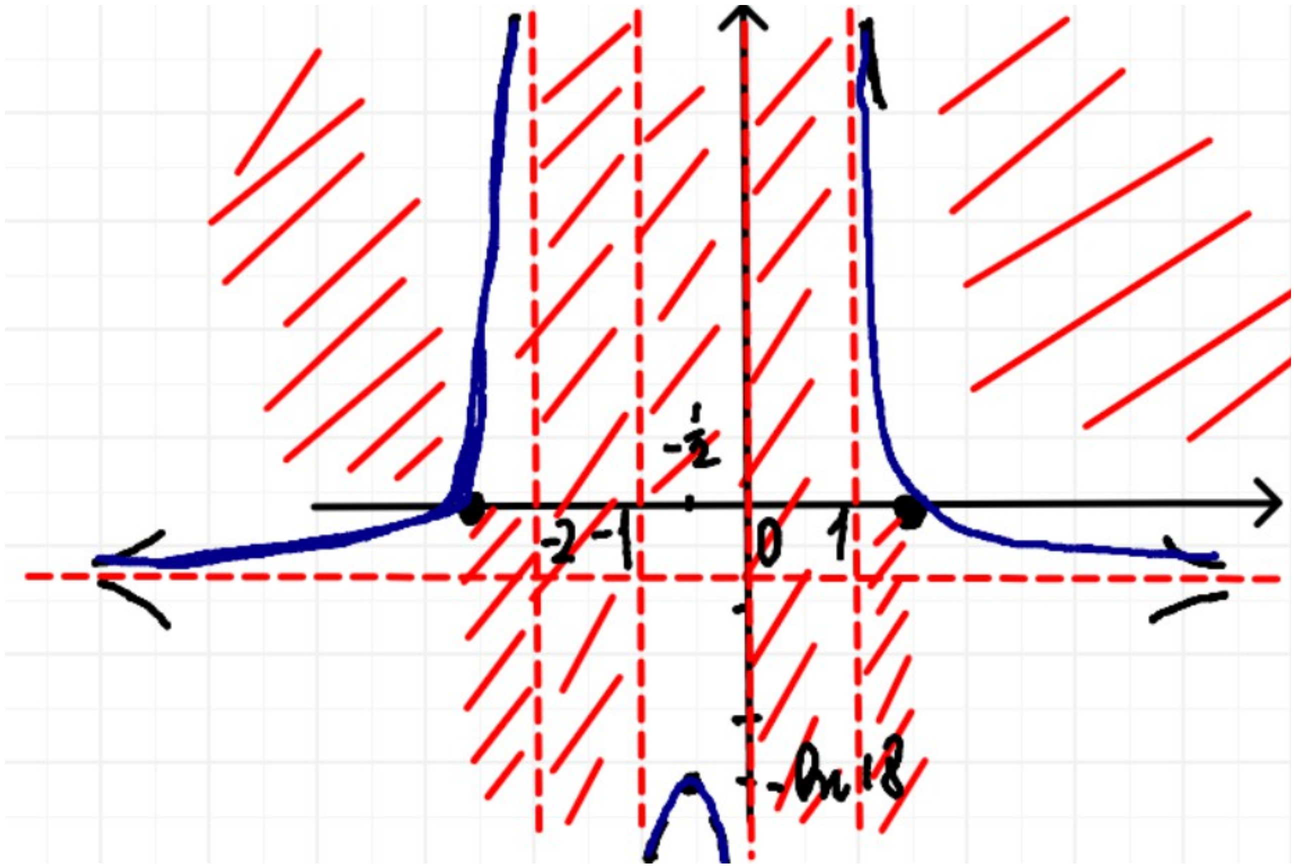
Per disegnarlo precisamente dovremmo anche calcolare la y:

$$y=\ln\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\ln\left(\frac{1}{18}\right)=\ln 1-\ln 18=-\ln 18\simeq-2{,}89$$

riportiamo tali informazioni sul grafico



Il grafico totale pertanto



$-\frac{1}{2}$
-2
-1
0
1
-0,18