

La parabola

La **parabola** è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta chiamata direttrice e da un punto chiamato fuoco.

Il vertice della parabola è il punto equidistante tra il fuoco e la sua proiezione sulla direttrice.

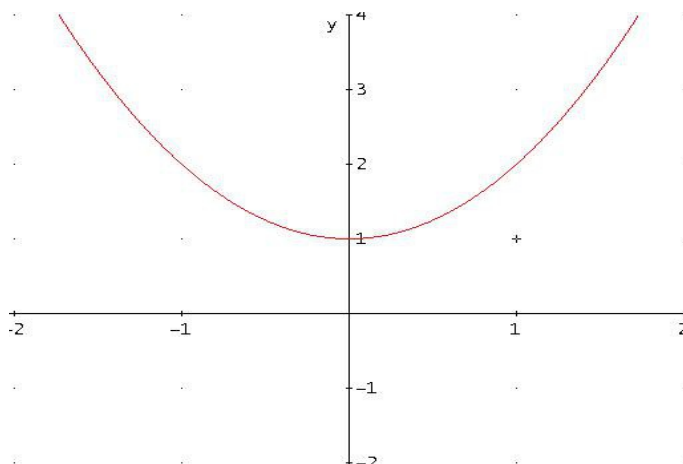
L'**equazione generica** di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse y (noi ci limiteremo a queste particolari parabole) è $y=ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$.

La condizione $a \neq 0$ è da imporre dato che se $a=0$ l'equazione generica diventerebbe priva del termine di secondo grado (ossia del tipo $y=bx+c$), in tal caso sarebbe una retta. Per essere una parabola deve essere presente il termine di secondo grado e deve essere il termine di grado massimo.

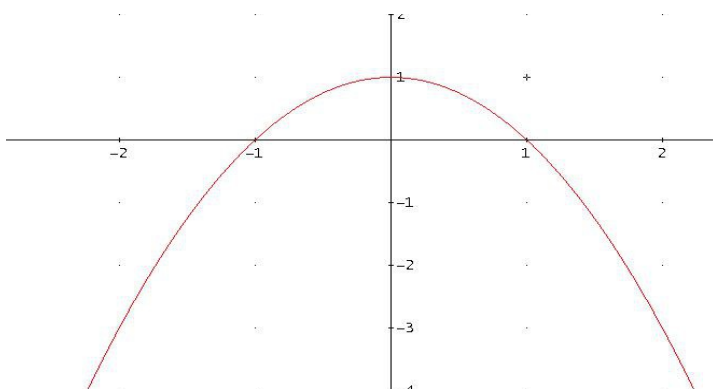
Significato dei coefficienti presenti:

→ **a** il coefficiente del termine di secondo grado indica **la concavità** della parabola:

$a > 0$ rivolta verso l'alto (sorridente)



$a < 0$ rivolta verso il basso (triste)



→ **b** fornisce informazioni sull'**asse di simmetria** della parabola: se $b=0$ l'asse di simmetria è l'asse y o anche il vertice della parabola è sull'asse y

→ il punto del piano $(0, c)$ è l'**intersezione fra la parabola e l'asse y**.

Disegno di una parabola

Per disegnare la retta costruivamo la tabella x/y, davamo almeno due valori alla x e ci calcolavamo i corrispondenti valori della y.

Essendo la parabola "curva" per applicare lo stesso metodo dovremmo attribuire molti valori alla x, diventa più opportuno Individuare dei punti del piano caratteristici che ci permettano di disegnare la parabola senza fare troppi calcoli. Tali punti del piano sono:

- **vertice** che essendo un punto del piano ha due coordinate.

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

- **punti di intersezione fra la parabola e asse x** che si trovano risolvendo il seguente sistema
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$
 ossia è sufficiente

risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Essendo quest'ultima un'equazione di secondo grado:

- ha 2 soluzioni distinte (di conseguenza la parabola due intersezioni con l'asse x) se $\Delta > 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$),
- due soluzioni coincidenti (una sola per semplicità) se $\Delta = 0$ (di conseguenza la parabola ha due intersezioni coincidenti con l'asse x) (vertice sull'asse x)
- nessuna soluzione se $\Delta < 0$ (di conseguenza la parabola non ha intersezioni con l'asse x)

- **punto di intersezione fra la parabola e asse y** è il punto $(0, c)$ poiché risolvendo il seguente sistema
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$$
 otteniamo come soluzione proprio il punto detto.

OSS: Le parabole che consideriamo sono tutte con l'asse di simmetria parallele all'asse y pertanto avranno sempre uno ed un solo punto d'intersezione con l'asse y mentre con l'asse x avranno al massimo due punti in comune (al massimo significa che possono essere 2 punti in comune, 1 o se preferite 2 coincidenti o nessuno)

Nel caso che questi punti non siano sufficienti a disegnare con una precisione ragionevole la parabola saranno integrati con altri ottenuti costruendo la tabella X/Y come per la retta.

L'**asse di simmetria** di una parabola è la retta perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco. La particolarità che la distingue è che la parabola è simmetrica rispetto a tale retta. Nel nostro caso tale retta ha equazione

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{ossia} \quad x = x_v.$$

Esempi:

1. Disegnare la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 7$

svolgimento:

I. punti di intersezione con asse x

basta risolvere $\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0$. Essendo un'equazione di secondo grado la risolviamo con la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

nel nostro caso $a = \frac{1}{4}$, $b = -1$, $c = -8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(-8)}}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm 3}{\frac{1}{2}}$$

la prima soluzione risulta $x = \frac{1+3}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \div \frac{1}{2} = 4 \cdot 2 = 8$

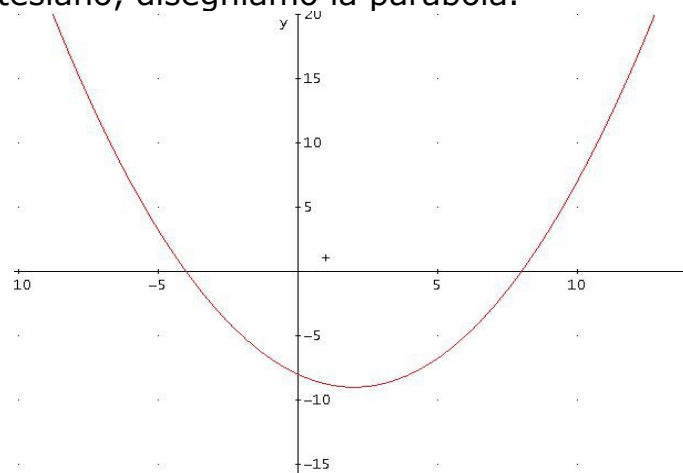
la seconda soluzione risulta $x = \frac{1-3}{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -2 \div \frac{1}{2} = -2 \cdot 2 = -4$

i punti di intersezione con asse x pertanto sono $(8;0)$ e $(-4;0)$, riportateli nel piano cartesiano

II. il punto di intersezione con l'asse y e' $(0,c)$ ossia nel nostro caso $(0,-8)$ da riportare nel piano cartesiano.

III. Il vertice $V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \equiv \left(-\frac{-1}{2\left(\frac{1}{4}\right)}; -\frac{9}{4\frac{1}{4}}\right) \equiv \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}; -9\right) \equiv (2; -9)$

osserviamo che Δ era già stato calcolato nel punto I. essendo l'argomento della radice nella formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Riportiamo anche questo punto nel piano cartesiano, disegniamo la parabola.



2. Disegnare la parabola $y=x^2+x+1$

svolgimento:

I. punti di intersezione con asse x

basta risolvere $x^2+x+1=0$. Essendo un'equazione di secondo

grado la risolviamo con la formula $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

nel nostro caso $a=1$, $b=1$, $c=1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

essendo il Δ negativo non esistono soluzioni di questa equazione di secondo grado, pertanto la parabola non interseca l'asse x.

II. il punto di intersezione con l'asse y e' $(0,c)$ ossia nel nostro caso $(0,1)$ da riportare nel piano cartesiano.

III. Il vertice $V\equiv\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\equiv\left(-\frac{1}{2(1)};-\frac{-3}{4(1)}\right)\equiv\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ osserviamo

che Δ era già stato calcolato nel punto I. essendo l'argomento della radice nella formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Riportiamo anche questo punto nel piano cartesiano,

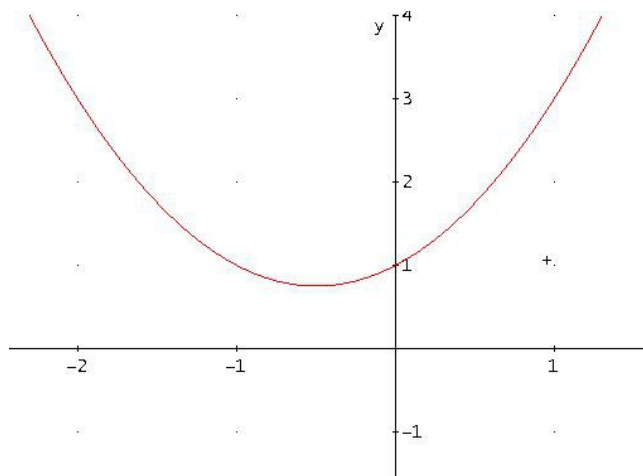
disegniamo la parabola tenendo presente che $-\frac{1}{2}=-0.5$ e

$$\frac{3}{4}=0.75$$

I punti caratteristici in questo caso sono soltanto due, integriamoli pertanto con degli altri costruendo la tabella X/Y come per la retta e riportiamoli nel piano cartesiano

X	Y
1	3
-1	1
2	7
-2	3

Dove il 3 l'abbiamo trovato sostituendo $x=1$ nell'equazione della parabola $(1)^2+1+1=3$ ecc.



3. Disegnare la parabola $y = -x^2 + 4$
svolgimento:

I. punti di intersezione con asse x

basta risolvere $-x^2 + 4 = 0$. Essendo un'equazione di secondo grado la risolviamo con la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ oppure essendo un'equazione di secondo grado incompleta pura ricaviamo la x $-x^2 = -4$ $x^2 = 4$, la prima $x = 2$, la seconda $x = -2$

i punti di intersezione con asse x pertanto sono $(2; 0)$ e $(-2; 0)$, riportateli nel piano cartesiano

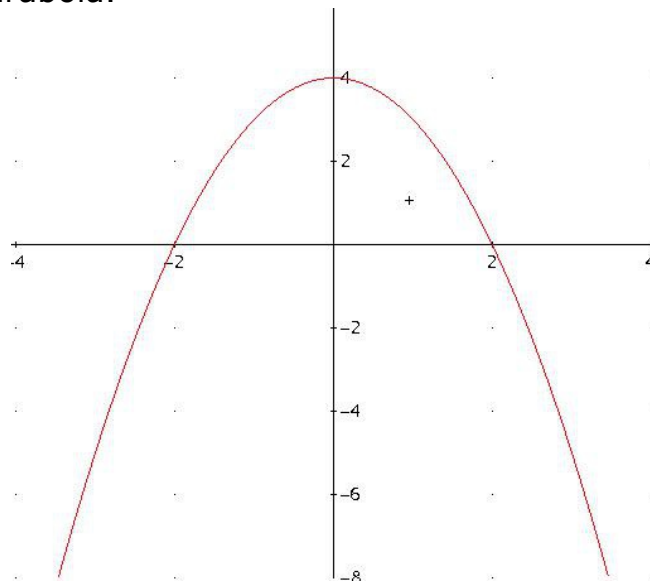
II. il punto di intersezione con l'asse y e' $(0, c)$ ossia nel nostro caso $(0, 4)$ da riportare nel piano cartesiano.

III. II vertice $V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$ calcoliamo

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(-1)(4) = 16$$

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) \equiv \left(-\frac{0}{2(-1)}; -\frac{16}{4(-1)} \right) \equiv \left(0; -\frac{16}{-4} \right) \equiv (0; 4)$$

Riportiamo anche questo punto nel piano cartesiano, disegniamo la parabola.



4. Disegnare la parabola $y = -3x^2 + 4x$
svolgimento:

I. punti di intersezione con asse x

basta risolvere $-3x^2 + 4x = 0$. Essendo un'equazione di secondo grado la risolviamo con la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ oppure essendo un'equazione di secondo grado incompleta spuria

mettiamo in evidenza una x $x \cdot (-3x+4)=0$ ed utilizzando la legge di annullamento del prodotto otteniamo le due soluzioni, la prima $x=0$, la seconda $-3x+4=0$ ossia $x=\frac{4}{3}$

i punti di intersezione con asse x pertanto sono $(0;0)$ e $(\frac{4}{3};0)$, riportateli nel piano cartesiano

II. il punto di intersezione con l'asse y e' $(0,c)$ ossia nel nostro caso $(0,0)$ da riportare nel piano cartesiano.

III. Il vertice $V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ calcoliamo

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-3)(0) = 16$$

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \equiv \left(-\frac{4}{2(-3)}; -\frac{16}{4(-3)}\right) \equiv \left(-\frac{4}{-6}; -\frac{16}{-12}\right) \equiv \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Riportiamo anche questo punto nel piano cartesiano, disegniamo la parabola.

